対空間のコホモロジーにも無論、環構造が導入できる。

Remmark 0.0.1

位相空間対 (X,A) に対し、$S(X) \xrightarrow{j_\sharp} S(X,A) \longrightarrow 0$ が完全なので、$0 \longrightarrow S^\sharp(X,A) \xrightarrow{j^\sharp} S^\sharp(X)$ が完全となる。これより、$S^\sharp(X,A)$ は $S^\sharp(X)$ の部分群と見なせる。

Lemma 0.0.2

位相空間 X の部分空間 A,B に対し、$u \in S_n(X,A)$, $v \in S_m(X,B)$ とすると、

$$u \cup v \in (S(X)/S(A)+S(B))^\sharp_{n+m}$$

proof)　　$\sigma \in K_{n+m}(A) \cup K_{n+m}(B)$ とすると、

$$\sigma \circ F_n \in K_n(A) \quad \text{または、} \quad \sigma \circ L_m \in K_m(B)$$

である。よって、$\sigma \circ F_n = 0 \ \text{ in } \ S(X,A)$ 　または、　$\sigma \circ L_m = 0 \ \text{ in } \ S(Y,B)$ より、

$$< u \cup v, \sigma >=< u, \sigma \circ F_n >< v, \sigma \circ L_m >= 0$$

$\therefore \quad u \cup v \in (S(X)/S(A)+S(B))^\sharp_{n+m}$

□

Definition 0.0.3

位相空間 X の部分空間 A,B に対し、$\{A,B\}$ が X のexisive pair ならば、

$u \in S_n(X,A)$, $v \in S_m(X,B)$ に対し、$u \cup v \in S_{n+m}(X, A \cup B)$ が定義できる。また、$[u] \in H^*(X,A)$, $[v] \in H^*(X,B)$ に対し、$[u] \cup [v] \in H^*(X, A \cup B)$ が、$[u] \cup [v] = [u \cup v]$ で定義できる。

このカップ積について次の性質が成り立つのは、位相空間のコホモロジーにおけるカップ積における証明と同様である。

Proposition 0.0.4

位相空間 X の部分空間 A,B に対し、$\{A,B\}$ が X のexisive pair ならば、次数 0 の準同型

$$\cup : H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \longrightarrow H^*(X, A \cup B)$$

が、$\cup(\alpha \otimes \beta) = \alpha \cup \beta$ により定義できる。

Proposition 0.0.5

位相空間 X の部分空間 A, B, C に対し、

$$\{A, B\}\ ,\ \{B, C\}\ ,\ \{A \cup B, C\}\ ,\ \{A, B \cup C\}$$

はそれぞれ exisive pair であるとする。このとき、$\alpha \in H^*(X, A)$, $\beta \in H^*(X, B)$, $\gamma \in H^*(X, C)$ に対し、

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) \quad \text{in} \ \ H^*(X, A \cup B \cup C)$$

すなわち、次が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^*(X,A) \otimes H^*(X,B) \otimes H^*(X,C) \arrow[r, "\cup\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\cup"'] & H^*(X, A \cup B) \otimes H^*(X,C) \arrow[d, "\cup"] \\
H^*(X,A) \otimes H^*(X, B \cup C) \arrow[r, "\cup"'] & H^*(A \cup B \cup C)
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.0.6

位相空間 X の部分空間 A, B に対し、$\{A, B\}$ が X のexisive pair ならば、

$\alpha \in H^*(X, A)$, $\beta \in H^*(X, B)$ に対し、$H^*(X, A \cup B)$ において、

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha$$

Proposition 0.0.7

位相空間 X の部分空間 A に対し、

$$\alpha \in H^*(X, A)\ ,\ 1 \in H^0(X) \text{ において、} \alpha \cup 1 = 1 \cup \alpha = \alpha$$

Remmark 0.0.8

上記の命題から、位相空間対 (X, A) に対し、$H^*(X, A)$ はカップ積により、単位元を持つ可換な次数付き環になることがわかる。これを (X, A) のコホモロジー環 と呼ぶ。

Proposition 0.0.9

位相空間 X の部分空間 A, B、Y の部分空間 C, D に対し、$\{A, B\}$, $\{C, D\}$ が exisive pair であり、$f : X \longrightarrow Y$ が、$f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$ を満たすならば、

$$\alpha \in H^*(Y, C) \ , \ \beta \in H^*(Y, D)$$

に対し、$f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$。つまり、次が可換。

$$\begin{tikzcd}
H^*(Y,C) \otimes H^*(Y,D) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "f^* \otimes f^*"'] & H^*(Y, C \cup D) \arrow[d, "f^*"] \\
H^*(X,A) \otimes H^*(X,B) \arrow[r, "\cup"'] & H^*(X, A \cup B)
\end{tikzcd}$$

Remmark 0.0.10

位相空間対 (X, A) , (Y, B) で、$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対し、

$$f^* : H^*(Y, B) \longrightarrow H^*(X, A)$$

は次数付き環の準同型である。

Proposition 0.0.11

X の部分集合からなる空間対 (X_1, A_1) , (X_2, A_2) を取り、$A \subset X_1 \cup X_2$ とする。このとき、

$$A_1' = X_1 \cap (A \cup A_1) \ , \ A_2' = X_2 \cap (A \cup A_2)$$

とおき、

$$\{X_1, X_2\} \ , \ \{A_1, A_2\} \ , \ \{A_1', A_2'\} \ , \ \{A_1 \cap A_2, A\} \ , \ \{A_1 \cup A_2, A\}$$

が、exisive pair であるとき、$\beta \in H^m(X_1 \cup X_2, A)$ に対し、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cup k^*(\beta)"'] & H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \arrow[d, "\cup \beta"] \\
H^{n+m}(X_1 \cap X_2, A_1' \cap A_2') \arrow[r, "\delta^*"'] & H^{n+m+1}(X_1 \cup X_2, A_1' \cup A_2')
\end{tikzcd}$$

ただし、δ^* はマイヤー・ヴィートリス完全列での連結準同型。

$$k : (X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 \cap A) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, A)$$

は inclusion。また、$\cup k^*(\beta), \cup\beta$ を、それぞれ、$k^*(\beta)\cup$, $(-1)^m\beta\cup$ に変えても成立する。

Proposition 0.0.12

$\{A, B\}$ が X の exisive pair とし、$\{A \times X, X \times B\}$ が $X \times X$ の exisive pair ならば、$\alpha \in H^*(X, A)$, $\beta \in H^*(X, B)$ に対し、

$$d : (X, A \cup B) \longrightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B)$$

を対角写像とすると、

$$\alpha \cup \beta = d^*(\alpha \times \beta)$$

つまり、次の図式が可換

$$\begin{tikzcd}
H^*(X,A) \otimes H^*(X,B) \arrow[r, "="] \arrow[d, "\times"'] & H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \arrow[d, "\cup"] \\
H^*((X,A) \times (X,B)) \arrow[r, "d^*"'] & H^*(X, A \cup B)
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.0.13

位相空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対し、$\{A \times Y, X \times B\}$ が $X \times Y$ の exisive pair とするとき、

$$p_1 : (X, A) \times Y \longrightarrow (X, A) \ , \ p_2 : X \times (Y, B) \longrightarrow (Y, B)$$

を projection とする時、$\alpha \in H^*(X, A)$, $\beta \in H^*(Y, B)$ に対し、

$$\alpha \times \beta = p_1^*(\alpha) \cup p_2^*(\beta)$$

つまり、次の図式が可換

$$\begin{tikzcd}
H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \arrow[r, "="] \arrow[d, "p_1^* \otimes p_2^*"'] & H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \arrow[d, "\times"] \\
H^*(X \times Y, A \times Y) \otimes H^*(X \times Y, X \times B) \arrow[r, "\cup"'] & H^*((X,A) \times (Y,B))
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.0.14

位相空間対 (X, A_1)，(X, A_2)，(Y, B_1)，(Y, B_2) に対し、

$$\alpha_1 \in H^p(X, A_1)\ ,\ \alpha_2 \in H^q(X, A_2)\ ,\ \beta_1 \in H^r(Y, B_1)\ ,\ \beta_2 \in H^s(Y, B_2)$$

とすると、適当な切除性の仮定の下、$H^*((X, A_1 \cup A_2) \times (Y, B_1 \cup B_2))$ において、

$$(\alpha_1 \times \beta_1) \cup (\alpha_2 \cup \beta_2) = (-1)^{qr}(\alpha_1 \cup \alpha_2) \times (\beta_1 \cup \beta_2)$$

Remmark 0.0.15

位相空間対 (X, A)，(Y, B) に対し、$\{A \times Y, X \times B\}$ が $X \times Y$ のexisive pair とする。このとき、

$$\times : H^*(X, A) \otimes H^*(Y, B) \longrightarrow H^*((X, A) \times (Y, B))$$

は次数付き環の準同型である。

Remmark 0.0.16

位相空間対 (X, A) に対し、準同型

$$k_n : H^n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)^\sharp$$

が、$k_n([u])[c] =< u, c >$ により、定義できる。（$[u] \in H^n(X, A)$，$[c] \in H_n(X, A)$）

Theorem 0.0.17　普遍係数定理

位相空間対 (X, A) に対し、$H_{n-1}(X, A)$ が自由であれば、

$$k_n : H^n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)^\sharp$$

は同型である。

Proposition 0.0.18

位相空間対 (X, A)，(Y, B) に対し、$\{A \times Y, X \times B\}$ が $X \times Y$ のexisive pair とする。このとき、$\alpha \in H^*(X, A)$，$\beta \in H^*(Y, B)$，$a \in H_*(X, A)$，$b \in H_*(Y, B)$ に対し、

$$< \alpha \times \beta, a \times b >=< \alpha, a >< \beta, b >$$

続いてキャップ積を位相空間対に拡張する。

Lemma 0.0.19

位相空間 X に対し、A, B をその部分空間とする。$u \in S^m(X, B)$, $c \in S_{n+m}(A) + S_{n+m}(B)$ に対し、$u \cap c \in S_n(A)$

proof)　　$\sigma \in K_{n+m}(A)$ に対して、$\sigma \circ L_n \in K_n(A)$ であり、$\sigma \in K_{n+m}(B)$ に対しては、$u \in S^m(X, B)$ であるが少しこの意味を考えてみる。$S^m(X, B)$ は $S^m(X)$ の部分群と見なしたわけだが、それは単射準同型、

$$p^\sharp : S^m(X, B) \longrightarrow S^m(X)$$

で見なしたわけである。ただし、p は projection である。つまり、$u = p^\sharp(u)$ で同一視したわけだ。$\sigma \circ F_m \in K_m(B)$ であるが、

$$< p^\sharp(u), \sigma \circ F_m >=< u, p(\sigma \circ F_m) >=< u, 0 >= 0$$

これにより、$u \cap c \in S_n(A)$

□

これにより、次のように位相空間対でのキャップ積が定義できる。定義の手法は位相空間の時とまったく同じなので、疑問に思ったならばそちらを見返してみると良い。

Definition 0.0.20

位相空間 X に対し、$\{A, B\}$ が X のexisive pair とすると、Lemma 0.0.19 より、

$$\cap : S^\sharp(X, B) \otimes S(X)/S(A) + S(B) \longrightarrow S(X, A)$$

が、カップ積の誘導から定義できる。さらに、

$$\cap : H^*(X, B) \otimes H_*(S(X)/S(A) + S(B)) \longrightarrow H_*(X, A)$$

が定義される。ここで、$\{A, B\}$ が X の exisive pair ならば、

$$H_*(S(X)/S(A) + S(B)) \cong H_*(X, A \cup B)$$

であるため、

$$\cap : H^*(X, B) \otimes H_*(X, A \cup B) \longrightarrow H_*(X, A)$$

となり、$\beta \in H^m(X,B)$, $\alpha \in H_{n+m}(X, A\cup B)$ に対し、

$$\cap(\beta\otimes\alpha) = \beta\cap\alpha$$

と書き、βとαの キャップ積と呼ぶ。

以下に位相空間対でのキャップ積の性質を綴る。証明は位相空間の時を参照あれ。

Proposition 0.0.21

位相空間 X の部分空間、A_1 , A_2 , A_3 に対し、$A = A_1\cup A_2\cup A_3$ とおく。

$$\{A_1, A_2\}\ ,\ \{A_2, A_3\}\ ,\ \{A_1\cup A_2, A_3\}\ ,\ \{A_1, A_2\cup A_3\}$$

が、exisive pair とする時、$\beta_2 \in H^*(X,A_2)$, $\beta_3 \in H^*(X,A_3)$, $\alpha \in H_*(X,A)$ に対し、

$$\beta_2\cap(\beta_3\cap\alpha) = (\beta_2\cup\beta_3)\cap\alpha$$

つまり、次の図式が可換。

$$\begin{tikzcd}
H^*(X,A_2)\otimes H^*(X,A_3)\otimes H_*(X,A) \arrow[r, "\cup\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\cap"'] & H^*(X,A_2\cup A_3)\otimes H_*(X,A) \arrow[d, "\cap"] \\
H^*(X,A_2)\otimes H_*(X,A_1\cup A_2) \arrow[r, "\cap"'] & H_*(X,A_1)
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.0.22

$1\in H^0(X)$, $\alpha\in H_*(X,A)$ に対し、$1\cap\alpha = \alpha$

Proposition 0.0.23

位相空間 X, Y に対し、$\{A_1, A_2\}$ は X の、$\{B_1, B_2\}$ は Y のexisive pair とする。また、$f : X \longrightarrow Y$ が、$f(A_1)\subset B_1$, $f(A_2)\subset B_2$ とする。このとき、$\beta\in H^*(Y,B_2)$, $\alpha \in H_*(X, A_1\cup A_2)$ に対し、

$$f_*(f^*(\beta)\cap\alpha) = \beta\cap f_*(\alpha)$$

つまり、次の図式が可換。

$$
\begin{tikzcd}
H^*(Y,B_2)\otimes H_*(X,A_1\cup A_2) \arrow[r, "1\otimes f_*"] \arrow[d, "f^*\otimes 1"'] & H^*(Y,B_2)\otimes H_*(Y,B_1\cup B_2) \arrow[d, "="] \\
H^*(X,A_2)\otimes H_*(X,A_1\cup A_2) \arrow[d, "\cap"'] & H^*(Y,B_2)\otimes H_*(Y,B_1\cup B_2) \arrow[d, "\cap"] \\
H_*(X,A_1) \arrow[r, "f_*"'] & H_*(Y,B_1)
\end{tikzcd}
$$

Proposition 0.0.24

$\beta \in H^n(X,A)$, $\alpha \in H_n(X,A)$, $\varepsilon_* : H_0(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$ に対し、

$$\varepsilon_*(\beta\cap\alpha) =< \beta,\alpha >$$

Proposition 0.0.25

X の部分集合からなる空間対 (X_1,A_1) , (X_2,A_2) を取り、$A\subset X_1\cup X_2$ とする。このとき、

$$A_1' = X_1\cap(A\cup A_1)\ ,\ A_2' = X_2\cap(A\cup A_2)$$

とおき、

$$\{X_1,X_2\}\ ,\ \{A_1,A_2\}\ ,\ \{A_1',A_2'\}\ ,\ \{A_1'\cup A_2',A\}\ ,\ \{A_1'\cap A_2', X_1\cap X_2\cap A\}$$

が、exisive pair であるとき、$\beta\in H^m(X_1\cup X_2,A)$ に対し、次の図式が可換となる。

$$
\begin{tikzcd}
H_n(X_1\cup X_2, A_1'\cup A_2') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\beta\cap"'] & H_{n-1}(X_1\cap X_2, A_1'\cap A_2') \arrow[d, "k^*(\beta)\cap"] \\
H_{n-m}(X_1\cup X_2, A_1\cup A_2) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-m-1}(X_1\cap X_2, A_1\cap A_2)
\end{tikzcd}
$$

ただし、∂_* はマイヤー・ヴィートリス完全列での連結準同型。そして、

$$k : (X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 \cap A) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, A)$$

は inclusion